View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Electronic archive of Tomsk Polytechnic University

УДК 519.872

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В НЕМАРКОВСКИХ RQ-СИСТЕМАХ С КОНФЛИКТАМИ ЗАЯВОК

А.А. Назаров, Е.А. Судыко

Томский государственный университет
E-mail: ESudyko@yandex.ru

Рассмотрена немарковская RQ-система с конфликтами заявок, при возникновении которых обе заявки переходят в источник повторных вызовов. Для процесса изменения состояний системы построена вложенная цепь Маркова. Найден вид функции, определяющий условия теоремы Мустафы об эргодичности цепи Маркова.

Ключевые слова:
Теория массового обслуживания, RQ-системы, конфликты заявок.

Key words:
The Retrial Queueing theory, Retrial queues, conflicts of requests.

Важным вопросом в теории массового обслуживания является определение условий существования стационарного режима в RQ-системах (Retrial Queues). Несмотря на обилие работ [1, 2], посвященных данному вопросу, проблема эргодичности RQ-систем с конфликтами заявок не нашла должного отражения в научной литературе. В данной работе мы использовали эргодическую теорему Мустафы для определения условий существования стационарного режима в немарковских RQ-системах.

Рассмотрим однолинейную немарковскую RQ-систему (рисунок) с конфликтами заявок, на вход которой поступает простейший поток с интенсивностью λ. Требование, обратившиеся к прибору и заставшее его свободным, немедленно занимает прибор и начинает обслуживаться в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B(x)$. Если за время обслуживания заявки другие требования не поступали, то заявка покидает систему после завершения обслуживания. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт, и обе переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. И если прибор свободен, то заявка из ИПВ немедленно занимает его для обслуживания. Если же прибор занят, то вновь возникает конфликт, и обе заявки переходят в ИПВ.

Обозначим $i(t)$ – число заявок в ИПВ в момент времени t.

Определим условия, при выполнении которых в рассматриваемой RQ-системе существует стационарный режим, т. е. процесс $i(t)$ является эргодическим.

Так как случайный процесс $i(t)$ для рассматриваемой RQ-системы является полумарковским, а эргодические свойства такого процесса полностью определяются эргодическими свойствами его вложенной цепи Маркова, то для процесса $i(t)$ определим вложенную цепь и исследуем ее эргодические свойства.

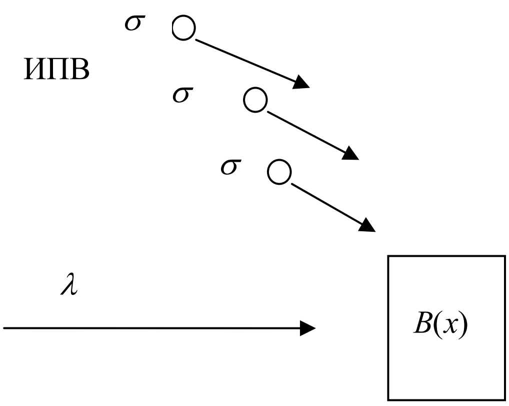

Рисунок. *Схема функционирования немарковской RQ-системы*

Рассмотрим моменты времени

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots,$$

где t_n – момент окончания режима обслуживания с прерыванием или завершением, и освобождением прибора, тогда процесс $\nu_n = i(t_n)$ с дискретным временем n является вложенной цепью Маркова для полумарковского процесса $i(t)$.

Найдем переходные вероятности $P_{ij}=P\{\nu_{n+1}=j|\nu_n=i\}$ вложенной цепи Маркова ν_n. За один шаг возможны следующие переходы цепи Маркова из состояния $\nu_n=i$ в состояния $\nu_n=j$, где $j=\{i-1,i,i+1,i+2\}$. Определим события, соответствующие этим переходам.

- $i \to i+2$: На прибор для обслуживания встала заявка из внешнего потока, ее обслуживание прервано заявкой из внешнего потока.
- $i \to i+1$: На прибор для обслуживания встала заявка из внешнего потока, ее обслуживание прервано заявкой из ИПВ; или на прибор встала для обслуживания заявка из ИПВ, ее обслуживание прервано заявкой из внешнего потока.
- $i \to i$: На прибор встала заявка из внешнего потока, обслуживание которой завершилось успешно; или на прибор для обслуживания встала

заявка из ИПВ, ее обслуживание прервано заявкой из ИПВ.

- $i \to i-1$: На прибор для обслуживания встала заявка из ИПВ, обслуживание которой завершилось успешно.

Тогда, учитывая описание модели, запишем вероятности переходов цепи Маркова v_n в виде

$$P_{ii+2} = \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \{1 - B^*(\lambda + i\sigma)\},$$

$$P_{ii+1} = \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \{1 - B^*(\lambda + i\sigma)\} +$$

$$+ \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + (i-1)\sigma} \{1 - B^*(\lambda + (i-1)\sigma)\},$$

$$P_{ii} = \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{(i-1)\sigma}{\lambda + (i-1)\sigma} \{1 - B^*(\lambda + (i-1)\sigma)\} +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} B^*(\lambda + i\sigma),$$

$$P_{ii-1} = \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} B^*(\lambda + (i-1)\sigma), \qquad (1)$$

$$P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii} + P_{ii-1} = 1, \qquad (2)$$

где (2) – условие нормировки, а

$$B^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dB(x)$$

– преобразование Лапласа–Стилтьеса функции распределения $B(x)$.

Таким образом, построена вложенная цепь Маркова v_n.

Применяя условия теоремы Мустафы [3], найдем условия существования стационарного режима для построенной цепи Маркова.

Теорема Мустафы. *Для того, чтобы неприводимая, непериодическая цепь Маркова была эргодической, достаточно существование $\varepsilon>0$, натурального числа i_0 и набора неотрицательных чисел x_0, x_1, x_2,..., таких, что*

$$\sum_{j \in X} P_{ij} x_j \le x_i - \varepsilon \quad \text{для} \quad i > i_0, \qquad (3)$$

$$\sum_{j \in X} P_{ij} x_j \le \infty \ \text{для} \ \ i \le i_0. \qquad (4)$$

При этом существует единственное эргодическое распределение, которое совпадает со стационарным.

Основная проблема применения этой теоремы заключается в построении последовательности x_i.

Обозначим b – время обслуживания в RQ-системе, т. е.

$$b = \int_0^\infty x\, dB(x).$$

Отметим свойство преобразования Лапласа–Стилтьеса $B^*(\alpha)$, заключающееся в выполнении предельного равенства

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha B^*(\alpha) = B'(0), \qquad (5)$$

где величина $B'(0)=B'(x)|_{x=0}$ – значение производной в нуле от функции распределения $B(x)$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Цепь Маркова, переходные вероятности которой определяются равенствами (1), при $B'(0)=\infty$, является эргодической при любых значениях загрузки $\rho=\lambda b$.*

Доказательство. В теореме Мустафы положим

$$x_i = \frac{z^{i+1}}{B^*(iz)}, \qquad (6)$$

где значение величины $z>0$, будет определено ниже. Неравенство (3), сформулированное в теореме Мустафы, перепишем в виде

$$\sum_{j \in X} P_{ij} x_j - x_i = P_{ii+2} \frac{z^{i+3}}{B^*((i+2)\sigma)} + P_{ii+1} \frac{z^{i+2}}{B^*((i+1)\sigma)} +$$

$$+ P_{ii} \frac{z^{i+1}}{B^*(i\sigma)} + P_{ii-1} \frac{z^i}{B^*((i-1)\sigma)} - - \frac{z^{i+1}}{B^*(i\sigma)} =$$

$$\left\{ P_{ii+2} \frac{z^3}{B^*((i+2)\sigma)} + P_{ii+1} \frac{z^2}{B^*((i+1)\sigma)} - \right.$$

$$\left. -[P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}] \frac{z}{B^*(i\sigma)} + \frac{P_{ii-1}}{B^*((i-1)\sigma)} \right\} z^i < -\varepsilon.$$

Это неравенство перепишем следующим образом:

$$P_{ii+2} \frac{z^3}{B^*((i+2)\sigma)} + P_{ii+1} \frac{z^2}{B^*((i+1)\sigma)} -$$

$$-[P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}] \frac{z}{B^*(i\sigma)} +$$

$$+ \frac{P_{ii-1}}{B^*((i-1)\sigma)} + \varepsilon\, z^{-i} < 0. \qquad (7)$$

Найдем предельные при $i \to \infty$ значения коэффициентов при положительных степенях z

$$\lim_{i \to \infty} \frac{P_{ii+2}}{B^*((i+2)\sigma)} = 0, \ \lim_{i \to \infty} \frac{P_{ii+1}}{B^*((i+1)\sigma)} = 0,$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}}{B^*(i\sigma)} = 1, \ \lim_{i \to \infty} \frac{P_{ii-1}}{B^*((i-1)\sigma)} = 1. \qquad (8)$$

В неравенстве (7), полагая $z>1$, выполним предельный переход при $i \to \infty$, учитывая (8), получим неравенство

$$-z+1<0, \qquad (9)$$

которое выполняется для любых значений $z>1$ независимо от значения ε и значений параметров системы, в том числе и для любых значений параметра ρ.

Из выполнения предельного неравенства (9) следует существование такого натурального числа i_0, что для всех $i>i_0$ выполняется допредельное неравенство (7). То есть для неотрицательных чисел x_i вида (6) для рассматриваемой цепи Маркова выполняется условие (3) теоремы Мустафы.

Условие (4) теоремы Мустафы очевидно выполняется для всех $i \le i_0$ в силу конечности чисел x_j и конечности числа слагаемых в сумме из левой части неравенства (4).

Таким образом, выполнение условий теоремы Мустафы доказывает сформулированную теорему.

Теорема доказана.

Для случая конечных значений $B'(0)$ докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Цепь Маркова, переходные вероятности которой удовлетворяют равенствам (1), при* $0<B'(0)<\infty$, *является эргодической при выполнении неравенства*

$$\rho < S = \frac{b}{2}B'(0), \qquad (10)$$

где величину S будем называть пропускной способностью системы.

Доказательство.

В теореме Мустафы положим

$$x_i = i\sigma z^{i+1}, \qquad (11)$$

где значение величины $z>0$, будет определено ниже. Неравенство (3), сформулированное в теореме Мустафы, перепишем в виде

$$\sum_{j\in X} P_{ij}x_j - x_i = P_{ii+2}(i+2)\sigma z^{i+3} + P_{ii+1}(i+1)\sigma z^{i+2} +$$

$$+P_{ii}(i+1)\sigma z^{i+1} + P_{ii-1}(i-1)\sigma z^{i} -$$

$$-i\sigma z^{i+1} = \{P_{ii+2}(i+2)\sigma z^3 + P_{ii+1}(i+1)\sigma z^2 -$$

$$-[P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}]i\sigma z + P_{ii-1}(i-1)\sigma\}z^i < -\varepsilon.$$

Это неравенство перепишем следующим образом:

$$P_{ii+2}(i+2)\sigma z^3 + P_{ii+1}(i+1)\sigma z^2 -$$

$$-[P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}]i\sigma z + P_{ii-1}(i-1)\sigma + \varepsilon z^{-i} < 0. \quad (12)$$

Найдем предельные при $i\to\infty$ значения коэффициентов при положительных степенях z, используя свойство преобразования Лапласа–Стилтьеса (5)

$$\lim_{i\to\infty}(i+2)\sigma P_{ii+2} = 0, \ \lim_{i\to\infty}(i+1)\sigma P_{ii+1} = 2\lambda,$$

$$\lim_{i\to\infty} i\sigma[P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}] = 2\lambda + B'(0),$$

$$\lim_{i\to\infty}(i-1)\sigma P_{ii-1} = B'(0). \qquad (13)$$

Здесь значение в нуле $B'(0)$ производной от функции распределения $B(x)$ обозначим $(2/b)S$, то есть

$$S = (b/2)B'(0), \qquad (14)$$

что совпадает с правой частью неравенства (10).

В неравенстве (12), полагая $z>1$, выполним предельный переход при $i\to\infty$, учитывая (13), получим неравенство

$$2\lambda z^2 - (2\lambda + B'(0))z + B'(0) < 0,$$

которое в силу обозначения (14) перепишем в виде

$$\rho z^2 - (\rho + S)z + S < 0. \qquad (15)$$

Квадратный трехчлен в левой части этого неравенства имеет корни $z_1=1$ и $z_2=S/\rho$, поэтому значения $z>1$, удовлетворяющие неравенству (15) существуют при выполнении условия $z_2>z_1=1$. Неравенство $z_2=S/\rho>1$ перепишем в виде

$$\rho < S,$$

который в силу (14) совпадает с неравенством (10).

Таким образом, выбирая значения величины z из интервала

$$z_1 = 1 < z < z_2 = S/\rho,$$

получим выполнение предельного неравенства (15), следовательно, при любом заданном конечном значении $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число i_0, что для всех $i>i_0$ выполняется допредельное неравенство (12), а следовательно для неотрицательных чисел x_i вида (11) для рассматриваемой цепи Маркова выполняется условие (3) теоремы Мустафы.

Условие (4) теоремы Мустафы очевидно выполняется для всех $i\leq i_0$ в силу конечности чисел x_j и конечности числа слагаемых в сумме из левой части неравенства (4).

Следовательно, выполнение условий теоремы Мустафы доказывает сформулированную теорему.

Теорема доказана.

Таким образом, в немарковской RQ-системе с конфликтами заявок стационарный режим существует при выполнении условия (10).

Интересно отметить, что величина S может принимать значения больше единицы и даже неограниченно возрастать. Следовательно, в таких однолинейных системах стационарный режим существует при загрузках $\rho>1$ и даже при сколь угодно больших значениях ρ.

Выводы

Рассмотрена немарковская RQ-система с конфликтами заявок, при возникновении которых обе заявки переходят в источник повторных вызовов. Построена вложенная цепь Маркова с дискретным временем. Сформулированы теоремы, определяющие условия существования стационарного режима в таких системах. Установлено, что величина пропускной способности может быть больше единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Artalejo J. R., Dudin A.N., Klimenok V.I. Stationary analysis of a retrial queue with preemptive repeated attempts // Operations Research Letters. – 2001. – V. 28. – № 4. – P. 173–180.
2. Kernane T. Conditions for stability and instability of retrial queueing systems with general retrial times // Statistics and Probability Letters. – 2008. – № 78. – P. 3244–3248.
3. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.
4. Назаров А.А., Судыко Е.А. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа // Проблемы передачи информации. – 2010. – Т. 46. – № 1. – С. 94–111.
5. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979. – 598 с.
6. Коцюруба П.И., Назаров А.А. Локальная диффузионная аппроксимация процесса изменения состояний неустойчивой сети случайного доступа в окрестности асимптотического среднего // Проблемы передачи информации. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 85–97.

Поступила 15.03.2011 г.